

## 第二届 TI-Nspire™ 手持技术创新思维解题大赛

### 竞赛试题

#### A 卷

本卷共六道题，每题 10 分共 60 分

1. 在算式  $\sum_{k=1}^{10^{100}} k^2$  的计算结果中，求数字 3 的个数。

2. 在研究三次函数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$  的图象时，发现图象上存在一个定点  $P$ ，过  $P$  作任意直线  $l$  交图象于  $A, B$  两点，能使  $AP = BP$ 。

(1) 求出  $P$  点的坐标；

(2) 当满足  $AP = BP = m$  的直线  $l$  有且仅有两条时，求实数  $m$  的取值范围。

3. 按下列要求解方程：

(1) 解方程  $\sin x = -x^2$ 。（精确到 0.0001）

(2) 求方程  $x^4 - (2 \times 10^{10} + 1)x^2 - x + 10^{20} + 10^{10} - 1 = 0$  的所有实根，要求精确到 0.0001。

(3) 如果方程  $\sin x = ax^2$  有五个解，求实数  $a$  的值。（精确到 0.00001）

4. 从等轴双曲线的中心向曲线的各条切线作垂线，求垂足的轨迹方程，并作草图。

5. 一个准确的时钟，分针与时针在 0 点重合后，两针尖间的距离逐渐由小变大，再由大变小，经过  $\frac{12}{11}$  小时后再次重合。设时针长 3cm，分针长 4cm。试问在两次重合之间，两针尖相离的速度何时最大？最大的速度是多少？速度最大时针尖之间的距离是多少？

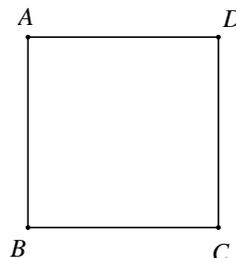


6. 在直角坐标系中，满足  $|t^2 + bt + a| \leq 1$ （其中  $0 \leq t \leq 1$ ）的点  $(a, b)$  会布满某个区域。求这个区域的面积。

## B 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共 20 分

7. 如图所示，某一平原上的四个村庄恰好坐落在边长为 10km 的正方形 ABCD 四个顶点上。现要建一个道路网，使任意两个村庄之间都有通道。请你设计一个道路网，并使它们的总长度不超过 28km.



(第 7 题)

8. 一列火车大约在下午 1 点（即 13 点）离开甲站，开往乙站，再前往丙站，离开的时间分布如下表所示。

火车离站时间概率表

离站时间	13:00	13:05	13:10
概率	0.7	0.2	0.1

火车从甲站到乙站途中所需平均时间为 30 分，标准差为 2 分。如果一位旅客希望乘坐这趟火车去丙站，他身在乙地，而且他到达乙站的时间分布如下表所示。

旅客到站时间概率表

到站时间	13:28	13:30	13:32	13:34
概率	0.3	0.4	0.2	0.1

请估计这位旅客能赶上这趟火车的概率有多大？

## C 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共 20 分

9. 在直角坐标系中，任意画一个三角形，可以用一条任意给定斜率的直线将它的周长二等分。如果按不同的方向画两条这样的直线，那么它们必定相交于某一点  $P$ 。这时，过点  $P$  有两条直线把三角形的周长二等分。试问：是否存在一点  $Q$ ，过此点有三条直线将三角形的周长二等分？如果存在，求出点  $Q$  的坐标。

10. 如图所示的这条鱼是用若干条曲线勾勒出的。请你用方程的曲线或函数的图象画出这条鱼（可以使用参数方程和极坐标方程）。以使用的方程和函数个数少、图形的相似度高为优胜。同时，提交一个 tns 格式的图形文件和一个说明文本。

