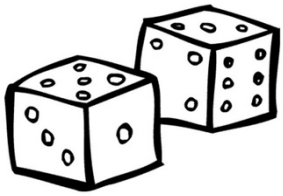
Simulatie op de Nspire en klassieke kansexperimenten

Chevalier de Méré
stelde een vraag aan Blaise Pascal:
Spel 1: Ik dobbel vier keer met 1 steen, en moet om te winnen minstens 1 keer zes gooien.



Spel 2: Ik dobbel vierentwintig keer met 2 stenen, en moet om te winnen minstens 1x dubbel zes gooien.
"Waarom verlies ik spel twee vaker dan spel een?"

Blaise Pascal

Antoine Gombaud, **Chevalier de** Méré(1607 - 1684) was een Franse ridder en schrijver die erg hield van gokken. Hij speelde vaak kansspelen met vrienden thuis.
Hij had een theorie waarvan hij dacht dat als hij die in praktijk zou brengen dat hij dan niet zou verliezen. Zijn redenering was als volgt: "bij één worp met twee dobbelstenen is de kans op dubbel zes (P(dubbel zes)) 1/36. Dus bij 24 worpen is de kans op minstens één keer dubbel zes 24/36 oftewel 2/3". Toen hij het spel vaker speelde verloor hij vaker dan dat hij won. Dit betekent dus dat de kans kleiner moet zijn dan 1/2. Blaise Pascal en Pierre de Fermat losten dit probleem samen op.

Chevalier de Méré

P(minstens één 6)=1 - P(geen 6)= $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$ is iets meer dan 0,5

P(minstens één dubbel6)= 1 - P(geen dubbel6)=$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ is iets minder dan 0,5

De simulatie van spel 1:

randint(1,6)	1 worp
randint(1,6,4)	4 worpen
countif(randint(1,6,4),6)	tel aantal zessen
seq(countif(randint(1,6,4),6),i,1,1000)	herhaal dat 1000x
countif(seq(countif(randint(1,6,4),6),i,1,1000),?>0)	en tel hoevaak minstens 1x 6 ogen

Simulatie spel2:

randint(1,6,24)+randint(1,6,24)
countif(randint(1,6,24)+randint(1,6,24),12)
seq(countif(randint(1,6,24)+randint(1,6,24),12) ,i,1,1000)
countif(seq(countif(randint(1,6,24)+randint(1,6,24),12) ,i,1,1000) ,?>0)

Trekken van de eerste aas

Neem een normaal kaartspel, 52 kaarten met vier azen.
Schud het spel en pak net zo lang een kaart totdat je de eerste aas trekt. Tel het aantal kaarten dat je getrokken hebt.
Het kan dus in de eerste trekking gebeuren, maar ook pas in de 49e.

Hoe vaak is dit gemiddeld?

Simulatie:

seq(i,i,1,52)

randsamp(seq(i,i,1,52),4,1)

Een steekproef van 4 zonder teruglegging (1) geeft de vier posities van de azen

min(randsamp(seq(i,i,1,52),4,1))

de positive van de eerste aas

seq(min(randsamp(seq(i,i,1,52),4,1)),I,1,100)

een lijst met 100 van deze posities

mean(seq(min(randsamp(seq(i,i,1,52),4,1)),I,1,100))

en daar het gemiddelde van

Theoretische aanpak:

P(X=1)= $\frac{4}{52}$

P(X=2)= $\frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}$

P(X=3)= $\frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{4}{50}$

..

P(X=k)= $\frac{nCr(48,k-1)}{nCr(52,k-1)}\cdot\frac{4}{53-k}$

Via een spreadsheet (wiskunde??) geeft dit een verwachtingswaarde van $\frac{53}{5}$

Het verjaardagsprobleem

Je krijgt aan het begin van het schooljaar een nieuwe klas met 25 leerlingen.
Er zitten geen meerlingen in deze klas.
Hoe waarschijnlijk is het dat er minstens één dag is waarop meerdere leerlingen jarig zijn.

Hoe zit het met andere groepsgroottes?

De oplossing in de schoolboeken gaat meestal via vragen als: Hoe groot is de kans dat vijf leerlingen allemaal een "eigen" verjaardag hebben?

$\frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\frac{362}{365}\frac{361}{365}$ = 0.972864

Hoe groot is de kans dat niet alle leerlingen een eigen verjaardag hebben?

1 - 0.972864 = 0.027136

En dat is de kans dat er minstens 1 dag is waarop leerlingen hun verjaardag samen hebben.

Daarna via notaties naar een veralgemenisering voor de kans op gemeenschappelijke verjaardag(en):

Voor een klas van 5: $1 - \frac{nPr(365,5)}{365^5}$ = 0.027136

Voor een klas van 25: $1 - \frac{nPr(365,25)}{365^{25}}$ = 0.507297

Voor een klas van n: $1 - \frac{nPr(365,n)}{365^n}$

Simulatie:

lst:=randint(1,365,25)

Hiermee krijg je 25 verjaardagen (trekking met teruglegging).

Deze kun je grafische weergeven en je ziet meteen of in die simulatie een dag een frequentie groter dan 1 heeft.

Overlopende flessen

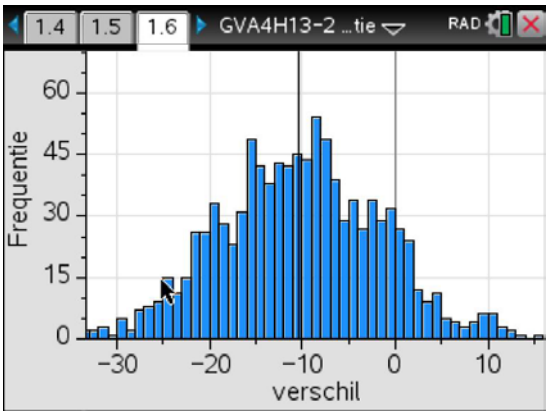
A 32 Een fabrikant vult flessen met limonade.
De inhoud X van een fles is normaal verdeeld met $\mu_X = 1015$ ml en $\sigma_X = 4$ ml. De door de vulmachine geleverde hoeveelheid limonade Y is normaal verdeeld met $\mu_Y = 1005$ ml en $\sigma_Y = 8$ ml.

a In hoeveel procent van de gevallen gaat er bij het vullen van de flessen limonade verloren?

b Op welk gemiddelde, in één decimaal nauwkeurig, moet de vulmachine worden ingesteld opdat in niet meer dan 0,2% van de gevallen bij het vullen limonade verloren gaat?

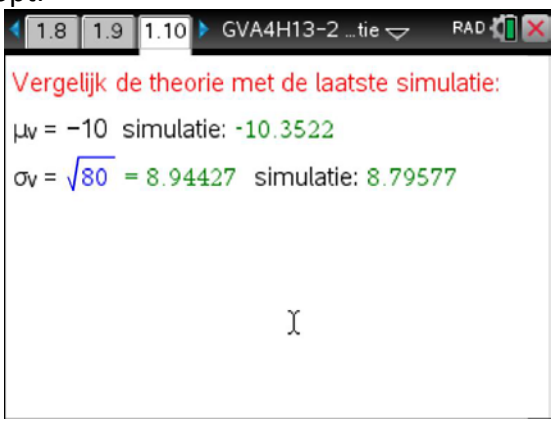
Getal en Ruimte vwo wisA H13 opg 32

Een simulatie in een voorbereid document geeft meer inzicht in de situatie waaraan gerekend moet worden.



Het verschil is (ongeveer) normaal verdeeld. De parameters voor dit verschil volgen uit de gegevens en de theorie.

Simulatie:
Flessen:=randNorm(1015,4,1000)
Vulling:=randNorm(1005,8,1000)
Verschil wordt berekend met vulling – flessen
Een verschil>0 betekent dat de fles overloopt.



Mens Erger Je Niet

Het gooien van de eerste zes leidt tot ergernis en een veelheid van wiskunde. Hoeveel beurten heb je nodig om de eerste zes te gooien?
Hoe lang duurt het gemiddeld?
De kansen zijn bekend:

$P(X=1)=\frac{1}{6}$

$P(X=2)=P(\cancel{6}6)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

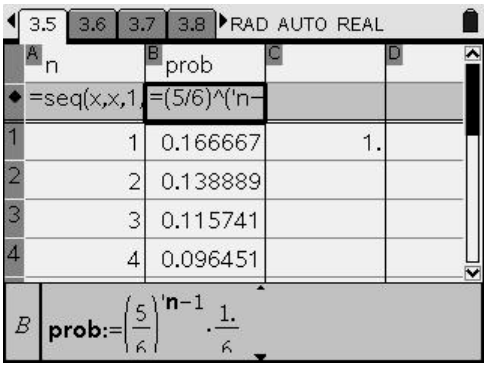
$P(X=3)=P(\cancel{6}\cancel{6}6)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$

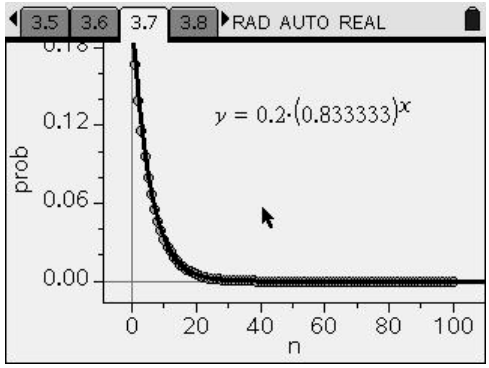
$P(X=4)=P(\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{125}{1296}$

$P(X=10)=P(\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6)=\left(\frac{5}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6}=\frac{1953125}{60466176}\approx 0{,}0323$ en

$P(X=n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$

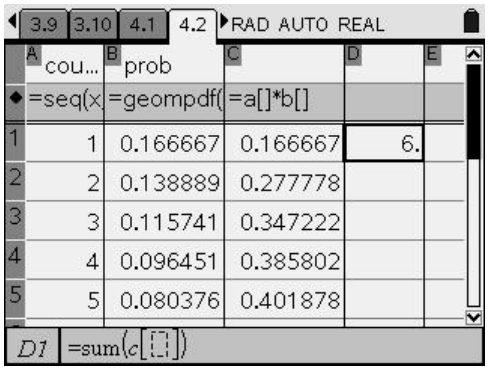
De algemene formule geeft een kansverdeling (voor n=1 tot 100) waar snel een grafiek bij te maken is.





Verwachtingswaarde

Hoe zit het met de verwachtingswaarde?
De verwachtingswaarde kun je in de spreadsheet op een voor de hand liggende manier benaderen. (100 regels)
De algebraïsche aanpak lijkt op die voor de somformule voor meetkundige rijen.



De opdracht is om E= $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n\cdot n\right)$ te bepalen.

Hiervoor is in een klassengesprek het volgende afgeleid:

$E=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot 5+.....$ en dan de list:

$\frac{5}{6}\cdot E=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot 5+.....\right)=$

$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot 5+.....$

Zet dit netjes onder elkaar en bepaal het verschil:

$E=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot 5+.....$

$\frac{5}{6}E=\qquad\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot 4+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot 5+.....$ dus

$\frac{1}{6}E=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot 1+.....$ en dit is de som van alle kansen en daar komt 1 uit. zodat $\frac{1}{6}E=1\Leftrightarrow E=6$ De verwachtingswaarde van een stochast met een geometrische (meetkundige) verdeling met succeskans $\frac{1}{6}$ is gelijk aan 6.

De algemene aanpak. Het bepalen van de verwachtingswaarde van een meetkundig verdeelde stochast met succeskans *p* .

$P(X=n)=(1-p)^{n-1}\cdot p$ dus $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(x=n)\cdot n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\cdot p\cdot n$

$E=(1-p)^{1-1}\cdot p\cdot 1+(1-p)^{2-1}\cdot p\cdot 2+(1-p)^{3-1}\cdot p\cdot 3+(1-p)^{4-1}\cdot p\cdot 4+(1-p)^{5-1}\cdot p\cdot 5+...$ dus

$E=p\cdot 1+(1-p)\cdot p\cdot 2+(1-p)^2\cdot p\cdot 3+(1-p)^3\cdot p\cdot 4+(1-p)^4\cdot p\cdot 5+...$

en met dezelfde list:

$(1-p)\cdot E=(1-p)\cdot(p\cdot 1+(1-p)\cdot p\cdot 2+(1-p)^2\cdot p\cdot 3+(1-p)^3\cdot p\cdot 4+(1-p)^4\cdot p\cdot 5+...)=$

$(1-p)\cdot p\cdot 1+(1-p)^2\cdot p\cdot 2+(1-p)^3\cdot p\cdot 3+(1-p)^4\cdot p\cdot 4+(1-p)^5\cdot p\cdot 5+...$

Zo dat: $p\cdot E=E-(1-p)\cdot E=$

$$\begin{array}{l} p\cdot 1+(1-p)\cdot p\cdot 2+(1-p)^2\cdot p\cdot 3+(1-p)^3\cdot p\cdot 4+(1-p)^4\cdot p\cdot 5+... \\ \quad (1-p)\cdot p\cdot 1+(1-p)^2\cdot p\cdot 2+(1-p)^3\cdot p\cdot 3+(1-p)^4\cdot p\cdot 4+(1-p)^5\cdot p\cdot 5+... \\ \hline p\quad +(1-p)\cdot p\quad +(1-p)^2\cdot p\quad +(1-p)^3\cdot p\quad +(1-p)^4\cdot p\quad +...= \end{array}$$

de som van alle kansen = 1

Dus $E(X)=\dfrac{1}{p}$

Simulatie:

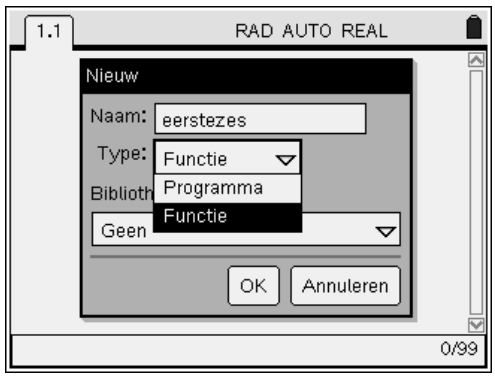
Simuleren van kansexperimenten kan op vele manieren. Eén ervan is het maken van eigen functies die bijvoorbeeld het telwerk overnemen.

De TI-Nspire heeft de mogelijkheid om eigen functies te definiëren. Zo kun je een functie maken die het gooien met de dobbelsteen tot de eerste zes van je overneemt en het aantal worpen als functiewaarde teruggeeft.

Dit gaat als volgt. Kies in het menu van een Rekenmachinepagina voor Functies en Programma's en dan in de Programma editor voor Nieuw. Geef een naam, hier **eerstezes** en kies voor functie.

Deze functie werkt zonder invoer. Ga met de cursor naar het vakje onder Func.

Daar komen de feitelijke programmaregels.




```
Define eerstezes()=
Func
:Local aantalworpen,aantalzes,worp
:aantalworpen:=0
:aantalzes:=0
:  While aantalzes<1
:     worp:=randInt(1,6)
:     If worp=6 Then
:       aantalzes:=1
:       aantalworpen:=aantalworpen+1
```

```
:     Else
:       aantalworpen:=aantalworpen+1
:     EndIf
:  EndWhile
:Return aantalworpen
:EndFunc
```

Het programma kan korter, maar in deze vorm is het makkelijk te veranderen in een functie die het aantal worpen tot de tweede zes telt:

```
Define tweedezes()=
Func
:Local aantalworpen,aantalzes,worp
:aantalworpen:=0
:aantalzes:=0
:  While aantalzes<2
:     worp:=randInt(1,6)
:     If worp=6 Then
:       aantalzes:=aantalzes+1
:       aantalworpen:=aantalworpen+1
:     Else
:       aantalworpen:=aantalworpen+1
:     EndIf
:  EndWhile
:Return aantalworpen
:EndFunc
```

Heb je de beschikking over de functie eerstezes() dan kun je gaan simuleren.

Simulatie:

```
…….. Seq(eerstezes(),i,1,1000)
       Mean(Seq(eerstezes(),i,1,1000))
```

Het Cereal-probleem.

Een fabrikant van cornflakes stopt in iedere doos een speeltje. Er zijn zes verschillende speeltjes die alle zes even vaak door de fabrikant in de verpakking worden gestopt.
Deze acties groeien soms uit tot ware hypes.
Voor leerlingen zijn McDonalds Happy Meals aansprekender.
Wiskundigen vragen zich in zo'n situatie af:
"Hoeveel pakken moet je gemiddeld kopen totdat je alle zes de speeltjes hebt?"
Bij zes speeltjes is dit hetzelfde als gooien met een dobbelsteen totdat je een "straat" hebt, ofwel alle zes de mogelijke ogentallen.

Gebruik de schoonheid van de wiskunde:
Begin te gooien, de eerste worp geeft zeker een "nieuw" resultaat.
Gooi verder, de kans dat je iets "nieuws" gooit is $\frac{5}{6}$, het aantal worpen dat hiervoor gemiddeld nodig is, is $\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$
Gooi verder, de kans dat je iets nieuws gooit is nu $\frac{4}{6}$, het aantal worpen dat hiervoor gemiddeld nodig is, is $\frac{1}{\frac{4}{6}}=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$
Gooi weer verder, de kans dat je iets nieuws gooit is $\frac{3}{6}$, het aantal worpen dat hiervoor gemiddeld nodig is, is $\frac{1}{\frac{3}{6}}=\frac{6}{3}=2$
Zo krijg je nog $\frac{1}{\frac{2}{6}}=\frac{6}{2}=3$ en $\frac{1}{\frac{1}{6}}=\frac{6}{1}=6$ waarvan we de laatste kennen van het spel "Mens, erger je niet".
Het verwachte aantal pakken dat je moet kopen om alle zes de speeltjes te vergaren is dus
$1+1\frac{1}{5}+1\frac{1}{2}+2+3+6=14\frac{7}{10}$